Całki podwójne i iterowane

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Kwiecień 2020

Całka podwójna

Całki podwójne to "ciągłe sumy" wartości funkcji rzeczywistych dwóch zmiennych $f(x, y)$. Oznaczamy je symbolem

$$\iint_D f(x, y) dxdy.$$

gdzie D jest pewnym pozdbiorem płaszczyzny. Przypominają one nieco szeregi z sumowaniem po dwóch indeksach

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}.$$

Rzeczywiście, otrzymujemy je jako granice pewnych sum zwanych *sumami całkowymi Riemanna*, definiowanymni podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej.

Interpretacja geometryczna

Całka podwójna będzie zdefiniowana podobnie jak całka pojedyncza, przy pomocy sum Riemanna, które przybliżają objętość pod wykresem funkcji $f(x,y)$ na jakimś obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ w przypadku gdy $f \geqslant 0$ na tym obszarze. Tak więc, zapamiętajmy:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

jeśli $f(x,y) \geqslant 0$ na D.

Całka podwójna z funkcji nieujemnej $f(x, y) = 10 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2$ po prostokącie P to objętość pod wykresem tej funkcji.

Grafika:OlegAleksandrov,Wikipedia®

Całki podwójne

Całka podwójna

1. Zaczniemy od zdefiniowania całki podójnej z $f(x, y)$ po prostokącie
$$P = [a, b] \times [c, d]$$
2. Sprowadzimy całki po prostokącie do tzw. całek iterowanych.
3. Rozszerzymy całki podwójne do bardziej ogólnych obszarów D.
4. Sprowadzimy całki po tych obszarach do całek iterowanych.

Całka podwójna po prostokącie

Niech $P = [a, b] \times [c, d]$ będzie prostokątem i niech $f(x, y)$ będzie zdefiniowana na P. Oznaczamy przez $\mathcal{P}$ partycję prostokąta P na mniejsze prostokąty $P_1, \ldots, P_n$. Wybieramy punkty $(x_i^*, y_i^*) \in P_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. *Sumą Riemanna funkcji f odpowiadającą partycji $\mathcal{P}$ i zbiorowi $\{(x_i^*, y_i^*) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$* jest suma

$$S(f, \mathcal{P}, \{(x_i^*, y_i^*) : 1 \leqslant i \leqslant n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

gdzie ΔS_i jest polem prostokąta P_i.

Całka po prostokącie

Zazwyczaj bierzemy taką partycję prostokąta P, że dzielimy odcinek $[a, b]$ na podprzedziały

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

natomiast odcinek $[c, d]$ na podprzedziały

$$[y_0, y_1], \ldots, [y_{m-1}, y_m]$$

i wtedy mamy nm małych prostokątów $P_1, \ldots P_{nm}$, dla których

$$\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j,$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Całka po prostokącie

W definicji całki podwójnej po prostokącie weźmiemy zagęszczający ciąg partycji. Definicja mówi, że aby funkcja była całkowalna, nie powinno być istotne, jaki ciąg partycji $\mathcal{P}_n$ weźmiemy, o ile największa przekątna

$$\delta(\mathcal{P}_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

będzie dążyć do zera, czyli że ciąg będzie się zagęszczać.

Definicja

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją zdefiniowaną na prostokącie P. Mówimy, że f jest *całkowalna na P* jeżeli granica

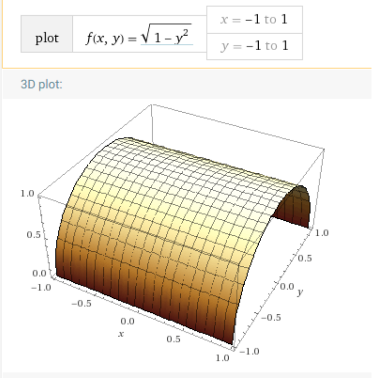
$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \{(x_i^*, y_i^*) : 1 \leqslant i \leqslant n\})$$

istnieje dla dowolnego ciągu $\mathcal{P}_n$ partycji, dla którego $\delta(\mathcal{P}_n) \to 0$ i granica ta nie zależy od wyboru tego ciągu, jak również od wyboru punktów $\{(x_i^*, y_i^*) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Granica ta nazywa się *całką podwójną z f po P* i oznacza się ją symbolem

$$\iint_P f(x,y)dxdy.$$

Widzimy, że takie sumy przybliżają objętość bryły pod wykresem f, jeżeli $f \geqslant 0$.

Całki podwójne



Całka podwójna z funkcji $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ po kwadracie $P = [-1, 1]x[-1, 1]$.

Łatwo obliczyć $V = \iint_P f(x, y)dxdy = (\frac{1}{2}\pi) \cdot 2 = \pi$.

Made with:WolframAlpha®

Całki podwójne

Bad news

1. Obliczenie całki podwójnej z definicji jest zazwyczaj niewykonalne (wychodzą koszmarne granice do policzenia).
2. Nie ma podwójnej całki nieoznaczonej i Fundamentalnego Twierdzenia Rachunku Całkowego, które pozwalałoby łatwo obliczać całki podwójne.

Całki podwójne

Good news

1. Jeśli $P = [a, b] \times [c, d]$, istnieją za to tzw. całki iterowane
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$
w których całkujemy po jednej zmiennej przy ustalonej drugiej zmiennej. Obie całki w większości przypadków są równe całce podwójnej. W efekcie, całki podwójne sprowadzają się do całek pojedynczych.
2. Jeśli D jest bardziej ogólnym obszarem, to za pomocą pewnych tricków można całkę po D sprowadzić do całek po prostokatach.

Całki podwójne

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *jest ciągła na* P, *to jest całkowalna na* P.

Przykłady

Następujące funkcje są całkowalne na dowolnym prostokącie $P \subset D_f$:

1. wielomiany dwóch zmiennych, np.

$$x^2y^2, \; 2x^2 + xy + y^3, \; 3y^2 + 3x^3y^7$$

2. inne funkcje elementarne, np.

$$e^{xy}, \; \sin(xy^2), \; \ln(1+xy), \; \frac{xy^2 + x^3}{x - y + 1}, \; \frac{1}{xy}, \; \sqrt{x^2 + y^2},$$

jeżeli tylko weźmiemy prostokąt P z dziedziny. Tak więc, np. dla funkcji $\frac{1}{xy}$ taki prostokąt musi omijać punkty, w których $x = 0$ lub $y = 0$.

Liniowość

Jeżeli $f(x,y), g(x,y)$ są całkowalne na P, to zachodzi własność liniowości:

$$\iint_P (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_P f(x,y)dxdy + \iint_P g(x,y)dxdy$$

$$\iint_P cf(x,y)dxdy = c\iint_P f(x,y)dxdy$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Te własności zachodzą również dla całek po ogólniejszych obszarach D.

Całki iterowane

Definicja

Przez *całki iterowane* z funkcji $f(x, y)$ po prostokącie $P = [a, b] \times [c, d]$ rozumiemy całki postaci

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{or} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

jeżeli istnieją. Zauważmy, że obliczanie całek iterowanych polega na całkowaniu najpierw po jednej zmiennej, przy ustalonej drugiej zmiennej.

Inna notacja

Często stosuje się inną notację, która jest nieco prostsza, ponieważ nie zawiera nawiasów:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \equiv \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \equiv \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Całki iterowane

Przykład

$$\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2x)dy = \int_1^2 \left(xy + \frac{1}{3}xy^3\right)_{y=0}^{y=3} dx$$

$$= \int_1^2 12x dx = \left(6x^2\right)_{x=1}^{x=2} = 18$$

Przykład

$$\int_0^\pi dy \int_0^\pi \sin(x+y)dx = \int_0^\pi (-\cos(x+y))_{x=0}^{x=\pi} dy =$$

$$\int_0^\pi (\cos y - \cos(y+\pi))dy = 2\int_0^\pi \cos y dy = (2\sin y)_{y=0}^{\pi} = 0$$

Całki iterowane

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na $P=[a,b]\times[c,d]$, to obie całki iterowane z f istnieją i zachodzi wzór

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

tzn. całka podwójna jest równa całkom iterowanym.

Dwie iteracje

Korzystając z całek iterowanych, możemy obliczyć całke podwójną na dwa sposoby. Kolejność całkowania czasami ma znaczenie w tym sensie że jednak iteracja prowadzi do prostszych obliczeń niż druga. Niemniej, zazwyczaj obie całki iterowane da się obliczyć.

Przykład

Dla $P = [0,1] \times [0,1]$ obliczymy całkę podwójną

$$\iint_P \frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

korzystając z całek iterowanych. W tym przypadku nie ma znaczenia jaką iterację wybierzemy, ponieważ mamy symetrię względem obu zmiennych i symetrię obszaru całkowania. Mamy

$$\iint_P \frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y^2+1} \right)_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (x\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{x^2+1}) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left((x^2+2)^{3/2} - (x^2+1)^{3/2} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2} - 2^{3/2} + 1)$$

Rozdzielone zmienne

Jeżeli mamy rozdzielone zmienne, tzn.

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

gdzie g oraz h są ciągłe, to zachodzi wzór

$$\iint_P f(x,y) = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$$

jeśli $P = [a,b] \times [c,d]$. Innymi słowy, jeżeli możemy rozdzielić zmienne i obszar całkowania jest prostokątem, to całka podwójna z $f(x,y)$ po każdym prostokącie jest równa iloczynowi całek pojedynczych.

Dowód

Jeżeli

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

to, korzystając z całki iterowanej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_P f(x,y) &= \int_a^b dx \int_c^d g(x)h(y)dy && (1) \\ &= \int_c^d h(y)dy \cdot \int_a^b g(x)dx && (2) \end{aligned}$$

dla $P = [a,b] \times [c,d]$.

Przykład

Jeżeli $P = [0,1] \times [0,\pi]$ oraz

$$f(x,y) = x \sin y$$

to, korzystając z powyższego twierdzenia, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_P x \sin y dx dy &= \int_0^1 x dx \cdot \int_0^\pi \sin y dy && (3) \\ &= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \cdot (-\cos y)\Big|_0^\pi && (4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1-(-1)) = 1 && (5) \end{aligned}$$

Obszar całkowania

Do tej pory mieliśmy do czynienia z całkami podwójnymi po prostokątach. Chcielibyśmy mieć możliwość całkowania po większej klasie obszarów. Sama definicja nie stanowi większego problemu, jeżeli obszar jest ograniczony, ponieważ można go zanurzyć w jakimś większym prostokącie i wziąć zerowe (trywialne) rozszerzenie funkcji f.

Całka podwójna po obszarze D

Niech $f(x,y)$ będzie zdefiniowana na obszarze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$. Niech P będzie prostokątem zawierającym D. Definiujemy rozszerzenie funkcji $f(x,y)$ do prostokąta P:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{gdy} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{gdy} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

a następnie całkę z $f(x,y)$ po D:

$$\iint_D f(x,y)dxdy := \iint_P f^*(x,y)dxdy$$

jeżeli całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że f jest *całkowalna* po D.

Całka podwójna po obszarze D

Oczywiście, całkę
$$\iint_P f^*(x,y)dxdy$$
możemy teraz iterować. Niemniej, po pierwsze, nie jest może od razu oczywiste czy f^* jest całkowalna na D, a poza tym iteracja po P nie jest zbyt wygodna, ponieważ rozszerzenie f^* nie jest zazwyczaj funkcją ciągłą na P i to rodzi pewne drobne problemy. Niemniej, intuicja mówi nam, że funkcja f^* powinna być całkowalna po P jeżeli f była ciągła na D i D jest w miarę ładnym zbiorem. To prowadzi do definicji obszaru normalnego.

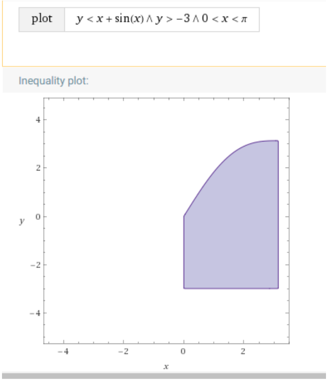
Definicja

Obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ jest *normalny względem osi x* jeśli jest postaci

$$D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

gdzie funkcje ϕ, ψ są ciągłe na $[a, b]$. Czyli: mamy przedział dla x, a y leży pomiędzy dwiema funkcjami ciągłymi.

Całki podwójne



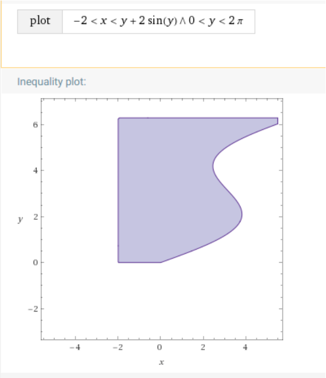
Obszar normalny względem osi x.
Mamy: $0 \leqslant x \leqslant \pi$ oraz $-3 \leqslant y \leqslant x + \sin x$.
Made with:WolframAlpha®

Definicja

Obszar D jest *normalny względem osi y* jeżeli jest postaci

$$D = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d, \phi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

gdzie ϕ, ψ są ciągłe na $[c, d]$. Czyli: mamy przedział dla y, a x leży pomiędzy dwiema funkcjami ciągłymi.



Obszar normalny względem osi y:
$0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ oraz $-2 \leqslant x \leqslant y + 2\sin y$.
Made with:WolframAlpha®

Trapezy krzywoliniowe

Obszary normalne często nazywa się *trapezami krzywoliniowymi* ponieważ mają one postać niby-trapezów, w których dwa boki mają postać krzywych zadanych funkcjami ϕ, ψ. Trapezy krzywoliniowe są zdeformowanymi prostokątami i dzięki temu całki po nich można łatwo iterować, podobnie jak dla prostokątów.

Całki podwójne

Twierdzenie

1. *Jeżeli $f(x,y)$ jest ciągła na D, gdzie*

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

to

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

2. *Jeżeli $f(x,y)$ jest ciągła na D, gdzie*

$$D = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d, \phi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

to

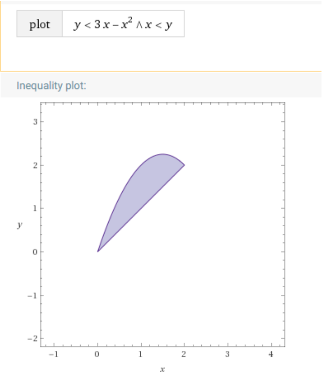
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

Przykład

Badamy całkę podwójną po obszarze normalnym względem osi x:

$$\iint_D xydxdy,$$

gdzie $D = \{(x, y) : x \leqslant y,\ y \leqslant 3x - x^2\}$. Punkty przecięcia wykresów funkcji $y = x$ oraz $y = 3x - x^2$ to $(0, 0)$ oraz $(2, 2)$. Ponadto, na $[0, 2]$ mamy $3x - x^2 \geqslant x$.



Obszar D: $x \leqslant y \leqslant 3x - x^2$ jest normalny względem osi x.

Made with: *WolframAlpha*®

Przykład

Mamy więc

$$\iint_D xydxdy = \int_0^2 dx \int_x^{3x-x^2} xydy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2\right)_{y=x}^{y=3x-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x(3x-x^2)^2 - x^3)dx$$

Pozostaje już tylko obliczyć całkę pojedynczą.

Przykład

Obliczymy całkę $\iint_D (x+y)^2 dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y = x$, $x = 0$, $y = 0$ oraz $y = x/2 + 1$. Widać, że D jest normalny względem osi x (jest to trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$). Mamy więc

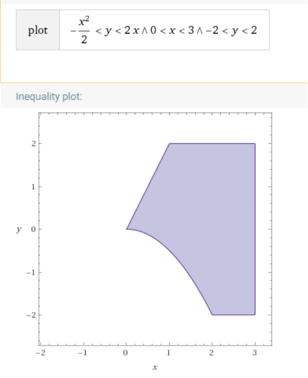
$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{x/2+1} (x+y)^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \left((x+y)^3\right)_{y=x}^{y=x/2+1} dx = \frac{1}{3}\int_0^2 ((\frac{3x}{2}+1)^3 - (2x)^3) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}(\frac{3x}{2}+1)^4 - 2x^4\right)_{x=1}^{x=3} = \dots$$

Definicja

1. Obszar D jest *regularny* jeżeli jest sumą skończonej liczby obszarów normalnych, których wnętrza są parami rozłączne.
2. Innymi słowy, mamy
$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$$
gdzie $D_1, \ldots, D_n$ są normalne względem osi x lub osi y, przy czym
$$\mathrm{Int}\, D_i \cap \mathrm{Int}\, D_j = \emptyset$$
gdy $i \neq j$.
3. Czasami obszar jest wprawdzie normalny względem którejś z osi, ale wygodnie jest go rozbić na prostsze obszary normalne.



Obszar D rozbijamy na dwa prostsze obszary normalne:

$D_1 : -2 \leqslant y \leqslant 0$ oraz $\sqrt{-2y} \leqslant x \leqslant 3$

$D_2 : 0 \leqslant y \leqslant 2$ oraz $y/2 \leqslant x \leqslant 3$

Made with: WolframAlpha®

Całka po obszarze regularnym

Jeżeli obszar D jest regularny o rozkładzie na obszary normalne

$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$$

to można pokazać, że

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy$$

Całki podwójne

Przykład

- Sprowadzimy całkę podwójną

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

do sumy całek iterowanych, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $xy = 1$ oraz $|x - y| = 1$. Nie precyzujemy funkcji f, ponieważ rozbicie na całki po obszarach normalnych jest takie samo dla wszystkich funkcji f.

Przykład

- Szukamy punktu przecięcia krzywych $y = x + 1$, $y = 1/x$:

$$x + 1 = \frac{1}{x} \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

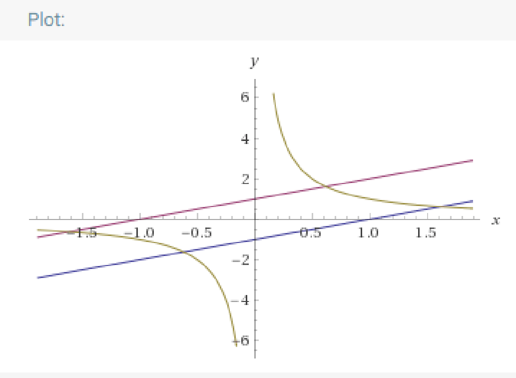
- Szukamy punktu przecięcia krzywych $y = x - 1$, $y = 1/x$:

$$x - 1 = \frac{1}{x} \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Przykład

- Dzielimy D na trzy obszary

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \ \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x+1\right\} \\
D_2 &= \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \ x-1 \leqslant y \leqslant x+1\right\} \\
D_3 &= \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ x-1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\right\}
\end{aligned}$$



Obszar D ograniczony jest przez narysowane krzywe:
$y = x - 1$, $y = x + 1$, $y = 1/x$.
Made with: *WolframAlpha*®

Przykład

To daje rozbicie całki podwójnej na trzy całki

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

$$+ \iint_{D_3} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} dx \int_{1/x}^{x+1} f(x,y)dy + \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} dx \int_{x-1}^{x+1} f(x,y)dy$$

$$+ \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dx \int_{x-1}^{1/x} f(x,y)dy$$

Koniec

Dziękuję za uwagę!